Les Suites Arithmétiques

1) Définition d'une suite arithmétique :

On appelle suite arithmétique une suite de nombres où on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre appelé raison de la suite arithmétique

Relation de récurrence : $\boxed{U_{n+1} = U_n + r}$

La raison de cette suite est : « r »

1^er cas : Soit une **s**uite arithmétique de premier terme $\mathbf{U_0}$ et de raison **r**.
Attention : Le premier terme est U_0 et il y a (n + 1) termes.

Rang « n »	0	1	2	3	………	n
Terme U_n	U_0	U_1 $= U_0 + r$	U_2 $= U_1 + r$ $= U_0 + 2r$	U_3 $= U_2 + r$ $= U_0 + 3r$	………	U_n $= U_{(n-1)} + r$ $= U_0 + nr$
Nbre de termes	1	2	3	4		n + 1

2^ème cas : Soit une **s**uite arithmétique de premier terme $\mathbf{U_1}$ et de raison **r**.
Attention : Le 1^er terme est U_1, et il y a n termes au lieu des (n + 1) du cas précédent

Rang « n »	1	2	3	4	………	n
Terme U_n	U_1	U_2 $= U_1 + r$	U_3 $= U_2 + r$ $= U_1 + 2r$	U_4 $= U_3 + r$ $= U_1 + 3r$	………	U_n $= U_{(n-1)} + r$ $= U_1 + (n-1)r$
Nbre de termes	1	2	3	4		n

Dans la suite de ce cours nous resterons dans le premier cas (1^er terme U_0). Toutes les démonstrations et les formules resteront les mêmes à condition de faire attention quand on devra remplacer « n » par « n + 1 » ou l'inverse

2) Somme des termes d'une suite :

Soit une **s**uite arithmétique de premier terme $\mathbf{U_0}$ et de raison **r**.

Rang « n »	0	1	2	3	………	n
Terme U_n	U_0	U_1 $= U_0 + r$	U_2 $= U_1 + r$ $= U_0 + 2r$	U_3 $= U_2 + r$ $= U_0 + 3r$	………	U_n $= U_{(n-1)} + r$ $= U_0 + nr$
Nbre de termes	1	2	3	4		n + 1

La somme des termes sera :

$$S = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{(n-2)} + U_{(n-1)} + U_n$$

On peut aussi l'écrire en sens inverse :

$$S = U_n + U_{(n-1)} + U_{(n-2)} + \dots + U_2 + U_1 + U_0$$

CES DEUX EXPRESSIONS SONT ABSOLUMENT IDENTIQUES ENTRE ELLES

On peut écrire aussi la somme en remplaçant les termes par leur valeur en fonction de U_0, et ceci dans les 2 sens vus ci-dessus. Ensuite on additionnera les deux lignes terme à terme.

$$\begin{array}{lllllll}
S = & U_0 & + (U_0 + r) & + (U_0 + 2r) & + (U_0 + 3r) & + \dots + & (U_0 + n\,r) \\
S = & (U_0 + n\,r) & + (U_0 + (n-1)\,r) & + (U_0 + (n-2)\,r) & + (U_0 + (n-3)\,r) & + \dots + & U_0 \\
\hline
2.S = & (2U_0 + n\,r) & + (2U_0 + n\,r) & + (2U_0 + n\,r) & + (2U_0 + n\,r) & + \dots + & (2U_0 + n\,r)
\end{array}$$

Il y a (n + 1) termes, donc : $\mathbf{2\,S = (n+1)(2U_0 + n\,r)} \Rightarrow \mathbf{S = (n+1)(2U_0 + n\,r) / 2}$

On peut aussi calculer la somme de la façon suivante :

$$Moyenne = \frac{(\text{Pr}\,emier\ terme) + (Dernier\ teerme)}{2}$$

$$et \quad Somme = (Nbre\ de\ termes)\ x\ (Moyenne)$$

$$Donc\ : \quad Somme = \frac{(Nbre\ de\ termes)\left[\,(\text{Pr}\,emier\ terme) + (Dernier\ terme)\,\right]}{2}$$

$$S = \frac{(n+1)(2U_0 + n\,r)}{2}$$

Ce qui permet de vérifier qu'on obtient bien la même chose.

<u>3) Quelques exemples</u> :

Soit la suite de premier terme : $\mathbf{U_n = 5}$ et de raison : $\mathbf{r = 3}$

Rang « n »	0	1	2	3	4	………	12	………	n
Terme U_n	U_0 5	U_1 8	U_2 11	U_3 14	U_4 17	………	U_{12} 41	………	U_n 5 + 3.n

On cherche la somme des 12 premiers termes :

$\mathbf{U_n = 5 + 3\,n}$ $\quad \mathbf{S_{(1\ à\ 12)} = 13\ x\ (\ 2x\ 5 + 12\ x\ 3) / 2\ = 13\ x\ 46 / 2\ = 299}$

Soit la suite de premier terme : $\mathbf{U_n = 10}$ et de raison : $\mathbf{r = -2}$

Rang « n »	0	1	2	3	4	………	12	………	n
Terme U_n	U_0 10	U_1 8	U_2 6	U_3 4	U_4 2	………	U_{12} -14	………	U_n 10 - 2.n

On cherche la somme des 12 premiers termes :

$\mathbf{U_n = 10 - 2\,n}$ $\quad \mathbf{S_{(1\ à\ 12)} = 13\ x\ (\ 2x\ 10 - 12\ x\ 2) / 2\ = 13\ x\ (-4) / 2\ = -\ 26}$