Les Suites Arithmético-Géométriques

1) Rappels :

11) Suites simples :

Toutes les suites ont en commun qu'elles sont définies par une relation de récurrence.
Ce qui signifie que le terme de rang (n+1) est défini par rapport au terme de rang (n).
Les plus simples, les suites arithmétiques et géométriques peuvent aussi être définies par une fonction, c'est à dire que le terme de rang (n) peut être calculé en fonction du premier terme, de la raison et de n.

$$\boxed{U_n = f(U_0, r, n)}$$

Pour ces suites, à partie du moment où cette fonction existe il est possible de calculer il est possible de calculer directement le $n^{ième}$ terme sans passer par les précédents et aussi d'établir des relations permettant de calculer directement la somme de « n » termes.

Pour les suites quelconques aucune de ces relations n'est évidente à priori et souvent seule la relation de récurrence existe.

12) Définition d'une suite géométrique :

On appelle suite arithmétique une suite de nombres où on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre appelé raison de la suite géométrique

Relation de récurrence : $\boxed{U_{n+1} = U_n \; q}$

Fonction : $\boxed{U_n = q^n \; U_0}$

La raison de cette suite est : « q »

13) Définition d'une suite arithmétique :

On appelle suite arithmétique une suite de nombres où on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre appelé raison de la suite arithmétique

Relation de récurrence : $\boxed{U_{n+1} = U_n + r}$

Fonction : $\boxed{U_n = U_0 + n\,r}$

La raison de cette suite est : « r »

14) Identification d'une suite :

Si pour tout « n » on a : $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = q \; (constante) \quad \Rightarrow$ *Cette suite est GÉOMÉTRIQUE*

Si pour tout « n » on a : $U_{n+1} - U_n = r \; (constante) \quad \Rightarrow$ *Cette suite est ARIMÉTHIQUE*

Sinon elle est QUELCONQUE

2) Les suites arthmético-géométriques :

Relation de récurrence : $\boxed{U_{n+1} = a \,.\, U_n + b}$

Dans cette expression, « a » et « b » sont des coefficients mais ne sont pas des « raisons ».
La suite arthmético-géométrique est une suite quelconque.

On va donc poser une nouvelle suite « W » telle que $\boxed{W_n = U_n + k}$

On va étudier la suite W_n

$$W_n = U_n + k \quad donc \quad W_{n+1} = U_{n+1} + k \quad et \quad W_0 = U_0 + k$$

$$Sachant\ que :\ U_{n+1} = a.U_n + b \ \ on\ obtient :\ W_{n+1} = a.U_n + b + k$$

$$Si\ la\ suite\ W_n\ est\ géométrique,\ on\ aura :$$

$$q = \frac{W_{n+1}}{W_n} = CONSTANTE$$

$$q = \frac{a.U_n + b + k}{U_n + k} = a\,.\left(\frac{U_n + \dfrac{b+k}{a}}{U_n + k}\right)$$

$$Si\ on\ pose :\ \frac{b+k}{a} = k \ \ alors\ :$$

$$q = a\,.\left(\frac{U_n + \dfrac{b+k}{a}}{U_n + k}\right) = a\,.\left(\frac{U_n + k}{U_n + k}\right) = a = CONSTANTE$$

$$On\ a\ posé :\ \frac{b+k}{a} = k \quad \Rightarrow \quad b + k = a\,k \quad \Rightarrow \quad b = (a-1)\,k$$

$$donc\ :\ k = \frac{b}{a-1}$$

$$La\ suite\ \ W_n = U_n + \frac{b}{a-1} \ \ est\ géométrique\ de\ raison = a \ \ et\ de\ 1^{er}\ terme = U_0 + \frac{b}{a-1}$$

$$La\ fonction\ de\ W_n\ sera :\quad W_n = a^n\, W_0 \quad \Rightarrow \quad W_n = a^n\left(U_0 + \frac{b}{a-1}\right)$$

$$Comme\ U_n = W_n - k \quad on\ en\ déduit\ la\ fonction\ de\ U_n$$

$$\boxed{U_n = a^n\left(U_0 + \frac{b}{a-1}\right) - \frac{b}{a-1}}$$

On a donc trouvé une fonction pour cette suite qui n'est ni arithmétique ni géométrique.

<u>3) Loi de Titus-Bode</u> :

La loi de Titus-Bode est une loi empirique qui a été ébauchée en 1741 par un astronome allemand du nom de Wolf.
Son compatriote **Johann Daniel Titius** (1729-1796) la reprend en 1766, mais elle est surtout connue grâce à **Johann Elert Bode** (1747-1826) qui la publie en 1772, alors qu'il est directeur de l'observatoire de Berlin.
Cette loi n'a jamais pu être rattachée à une caractéristique physique quelconque dans le système solaire. ***Sa validité est très approximative, surtout pour les planètes lointaines***.
Mais dans la pratique elle donne un bon ordre de grandeur.
<u>C'est une suite Arithmético-Géométrique</u>

$$\boxed{D = 0{,}4 + 0{,}3\,(2^n)}$$

[D] est la distance d'une planète au soleil en U.A. (Rappel : 1 U.A. = 149,6 10^6 km)
[n] est le rang de la planère

Mercure a le rang **« - infini »**
Vénus a le rang **« 0 »**
La Terre a le rang **« 1 »**

	Rang	**U.A.**	**M.km**
Mercure	- infini	0,4	57,91
Vénus	0	0,7	108,2
Terre	1	1,0	149,6
Mars	2	1,5	227,94
???	3	2,8	418,88
Jupiter	4	5,2	778,33
Saturne	5	9,6	1429,4
Uranus	6	19,2	2870,99
Neptune	7	30,1	4504,3
Pluton	8	39,5	5914

On constate dans ce tableau qu'entre Mars et Jupiter on passe du rang 2 au rang 4
Les astronomes se sont posé des questions sur la raison de ce « trou » et on observé ce qui pouvait bien y avoir à 2,8 U.A. du soleil (419 10^6 km)
Ce qui a conduit à la découverte de la ceinture d'astéroïdes qui se trouve à cet emplacement, d'où certaines théories qui supposent que ça correspondrait aux restes de la planète de rang 3 qui aurait explosé. Aucune preuve ne confirme cette théorie à ce jour.