P R I M I T I V E S

Quelques primitives usuelles :

$$\int u'(x)\, u(x)^n \, dx = \frac{u(x)^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} \, dx = \ln(x) + C$$

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \, dx = 2\sqrt{u(x)} + C$$

$$\int u'(x)\, e^{u(x)} dx = e^{u(x)} + C$$

$$\int u'(x)\, e^{u(x)} dx = e^{u(x)} + C$$

$$\int u'(x)\, a^{u(x)} dx = \frac{a^{u(x)}}{\ln a} + C$$

$$\int u'(x) \sin u(x) \, dx = -\cos u(x) + C$$

$$\int u'(x) \cos u(x) \, dx = \sin u(x) + C$$

Les fonctions suivantes sont traitées seulement en « x ».
Pour avoir l'expression avec « u(x) » *il suffit de rajouter* « $u'(x)$ » *en facteur devant l'expression dont on cherche la primitive.*

$$\int tg\ x \, dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int th\ x \, dx = -\ln(ch\ x) + C$$

$$\int (tg\ x)^2 dx = tg\ x - x + C$$

$$\int (th\ x)^2 dx = x - th\ x + C$$

$$\int \text{cotg x dx} = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{1}{th\ x} dx = -\ln\left| th \frac{x}{2} \right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left| tg \frac{x}{2} \right| + C$$

$$\int \frac{1}{sh\ x} dx = \ln\left| th \frac{x}{2} \right| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

$$\int \frac{1}{ch\ x} dx = 2\ Arctg(e^x) + C$$

$$\int \frac{1}{(\sin x)^2} dx = -\text{cotg x} + C$$

$$\int \frac{1}{(sh\ x)^2} dx = \frac{-1}{th\ x} + C$$

$$\int \frac{1}{(\cos x)^2} dx = tg\ x + C$$

$$\int \frac{1}{(ch\ x)^2} dx = th\ x + C$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = \left[u(x)\, v'(x) \right]_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, dx$$

D'après la formule de Leibniz :

$$\int_a^b u(x)\, v^{(n+1)}(x)\, dx = \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u^{(k)}(x)\, v^{(n-k)}(x) \right]_a^b + (-1)^k \int_a^b u^{(n+1)}(x)\, v(x)\, dx$$

Exemple 1 : $\displaystyle\int_0^{\pi/3} x\cos(x)\,dx$

Pour intégrer par parties on effectue les changements de variables suivants :

u(x) = x donc u'(x) = 1 et v(x) = cos(x) donc v'(x) = sin(x)

$$\int_0^{\pi/3} x\cos(x)\,dx = [u(x)\,v(x)]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} u'(x)\,v(x)\,dx$$

$$= [x\sin(x)]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} \sin(x)\,dx$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + [\cos(x)]_0^{\pi/3}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2}$$

Exemple 2 : $\displaystyle\int_a^b x\,e^x\,dx$

Pour intégrer par parties on effectue les changements de variables suivants :

u(x) = x donc u'(x) = 1 et dv = e^x dx donc du = dx et v = e^x

$$\int_a^b xe^x\,dx = [xe^x]_a^b - \int_a^b e^x\,dx = [xe^x - e^x]_a^b$$

Donc la primitive de x e^x est (x – 1)e^x + K

<u>Intégration par changement de variable</u> :

<u>Exemple</u> : $I = \int \dfrac{x^4}{(x+a)^{15}}\, dx$

Le choix de la nouvelle variable doit faire disparaître $(x+a)^{15}$

$on\ pose : \quad u(x) = (x+a) \qquad donc : \ u'(x) = 1$

$\Rightarrow \quad x = u - a \qquad \Rightarrow \quad x^4 = (u-a)^4$

Les coefficients donnés par le triangle de Pascal à l'ordre 4 sont : $1 , 4 , 6 , 4 , 1$

$x^4 = (u-a)^4 = u^4 - 4u^3a + 6u^2a^2 - 4u\,a^3 + a^4$

$u'(x) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad du = dx$

$$I = \int \frac{u^4 - 4u^3a + 6u^2a^2 - 4u\,a^3 + a^4}{u^{15}}\, du$$

$$I = \int \left(u^{-11} - 4\,a\,u^{-12} + 6\,a^2u^{-13} - 4\,a^3u^{-14} + a^4u^{-15} \right) du$$

$Comme \quad u' = 1 \quad on\ peut\ écrire :$

$$I = \int u'\,u^{-11}\,du \ - 4\,a \int u'\,u^{-12}\,du \ + 6\,a^2 \int u'\,u^{-13}\,du \ - 4\,a^3 \int u'\,u^{-14}\,du \ + a^4 \int u'\,u^{-15}\,du$$

$Rappel : \ \int u'\,u^n\,du = \dfrac{1}{n+1}\,u^{n+1}$

$I = -\dfrac{1}{10}\,u^{-10} + \dfrac{4\,a}{11}\,u^{-11} - \dfrac{6\,a^2}{12}\,u^{-12} + \dfrac{4\,a^3}{13}\,u^{-13} - \dfrac{a^4}{14}\,u^{-14} \qquad On\ remplace\ "u"\ par\ "(x+a)"$

$La\ primitive\ finale\ est\ donc :$

$$I = \frac{-1}{10\,(x+a)^{10}} + \frac{4\,a}{11\,(x+a)^{11}} - \frac{6\,a^2}{12\,(x+a)^{12}} + \frac{4\,a^3}{13\,(x+a)^{13}} - \frac{a^4}{14\,(x+a)^{14}}$$