Les Matrices

__Quelques formules utiles sur les matrices__ **:**

Déterminant :

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\boxed{\textit{Attention à la notation} : \left[MATRICES\right] \, et \, \left|DÉTERMINANTS\right|}$$

Déterminant de rang 3 x 3 :

$$\begin{vmatrix} a & \alpha & x \\ b & \beta & y \\ c & \lambda & z \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} \beta & y \\ \lambda & z \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} \alpha & x \\ \lambda & z \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} \alpha & x \\ \beta & y \end{vmatrix}$$

Produits de matrices :

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & by & cz \\ dx & ey & fz \\ gx & hy & iz \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \lambda & \delta \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A.B = \begin{bmatrix} a.\alpha + b.\lambda & a.\beta + b.\delta \\ c.\alpha + d.\lambda & c.\beta + d.\delta \end{bmatrix}$$

Le produit des matrices est associatif et NON commutatif :

A.(B.C) = (A.B).C mais **A.B** n'est pas obligatoirement égal à **B.A**

Inversion d'une matrice :

On ne définira l'inverse d'une matrice A que si A est carrée.
On appelle inverse de la matrice carrée A toute matrice B telle que AB = BA = I (I matrice identité).
La matrice B est alors notée : $B = A^{-1}$

Remarque : une matrice et l'inverse de cette matrice ont nécessairement les mêmes dimensions (pour que la condition de dimension soit satisfaite et qu'on puisse calculer les produits AB et BA).

Si $B = A^{-1}$ et $C = A^{-1}$ alors $B = C$
Si B vérifie une des 2 égalités : A.B = I ou B.A = I alors elle vérifie aussi l'autre.
Si A et B sont inversible, alors leur produit est inversible : $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
Le déterminant de l'inverse d'une matrice est l'inverse du déterminant de la matrice : $\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$
Si on fait le produit d'une matrice par son inverse on obtient la matrice identité $A.A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Une matrice carrée admettant une matrice inverse est dite inversible ou régulière.
Une matrice carrée n'admettant pas d'inverse est dite **singulière**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & \dots & b_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1n} & \dots & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Les coefficients b_{ij} sont les déterminants des comatrices (a_{ij}) associées à A multipliés par $(-1)^{i+j}$ et ensuite transposés (c.à.d. inversés symétriquement suivant la diagonale b_{11} / b_{nm}).
Nous remarquons par exemple que le terme en bas de la première colonne qui devrait être b_{n1} a été inversé avec b_{1n}.

La comatrice de a^{ij} est la matrice A à laquelle on a retiré la ligne « i » et la colonne « j »

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{nj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow b_{ij} = (-1)^{i+j} . \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(i-1)1} & \dots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \dots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \dots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \dots & a_{(i+1)n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

La comatrice a_{ij} est la matrice A à laquelle on a retiré la ligne « i » et la colonne « j »

Déterminant de la comatrice a_{ij}

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & d \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$