LOI BINOMIALE

1. Loi de Bernoulli

Définition :

- On appelle épreuve de Bernoulli toute épreuve à deux issues possibles : un succès (noté S) ou un échec (noté $\overline{S}$).
- La loi de Bernoulli est la loi de probabilité de la variable aléatoire **X** prenant la valeur 1 si l'issue est un succès, et 0 si l'issue est un échec.
- On note $p = p(\mathbf{X} = 1) = p(S)$. p est appelé paramètre de la loi de Bernoulli.
- On dit aussi que loi de probabilité de la variable aléatoire **X** suit la loi de Bernoulli.

2. Schéma de Bernoulli – Loi binomiale

Définition :

- On appelle schéma de Bernoulli d'ordre n l'expérience consistant à répéter n fois de manière indépendantes la même épreuve de Bernoulli de paramètre p.

- La loi binomiale de paramètres n et p est la loi de probabilité de la variable aléatoire X prenant comme valeurs le nombre de succès (S) obtenus au cours des n épreuves du schéma de Bernoulli.

- On dit aussi que loi loi de probabilité de la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p.

Définition : Le nombre de chemins de l'arbre pondéré associé à un schéma de Bernoulli d'ordre n conduisant à k succès pour n répétitions est noté : $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$

Les nombres entiers $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ sont appelés coefficients binomiaux. Ça se lit « ***k* parmi *n*** ».

Propriétés :

$$\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} = 1 \qquad et\ si\ n > 1 : \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = n$$

$$Pour \quad 0 \leq k < n \qquad \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix} \quad et \quad \begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix}$$

Soit **X** une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.

1. Les valeurs de X sont $\{0 ; 1 ; 2 ; . . . ; n\}$
2. Pour tout $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$:

$$\boxed{p(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^{k} (1-p)^{n-k}}$$

3. Espérance, variance, écart-type

Propriété :
Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.

Son espérance est :	$E(X) = n\,p$
Sa variance est :	$V(X) = n\,p\,(1-p)$
Son écart type est :	$\sigma(X) = \sqrt{n\,p\,(1-p)}$

4. Calcul de : $\binom{n}{k}$

1. Par les factorielles :

$$\boxed{\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Exemple : $\binom{6}{2} = C_2^6 = \dfrac{6!}{2!(6-2)!} = \dfrac{6.5.4.3.2.1}{2.(4.3.2.1)} = 15$

2. Par le triangle de Pascal :

On lit ligne n°6 (n = 6) , colonne n°2 (k = 2) : $\binom{6}{2}$ = 15

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	**15**	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Toutes les cellules sont construites suivant :

A	**B**
	C

C = A + B

Ce qui démontre que : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$