Les Logarithmes

1) Origine

Archimède utilisait un tableau des puissances de 2 pour faciliter certaines multiplications :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\mathbf{2^n}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	65536

Par exemple, au lieu de multiplier 64 par 256, on additionne les puissances respectives :
6 + 8 = 14 et pour 2^{14} on lit 16384
Grâce à cette table on a additionné 6 et 8 au lieu de multiplier 64 par 256.

Le logarithme de base 2 était né :

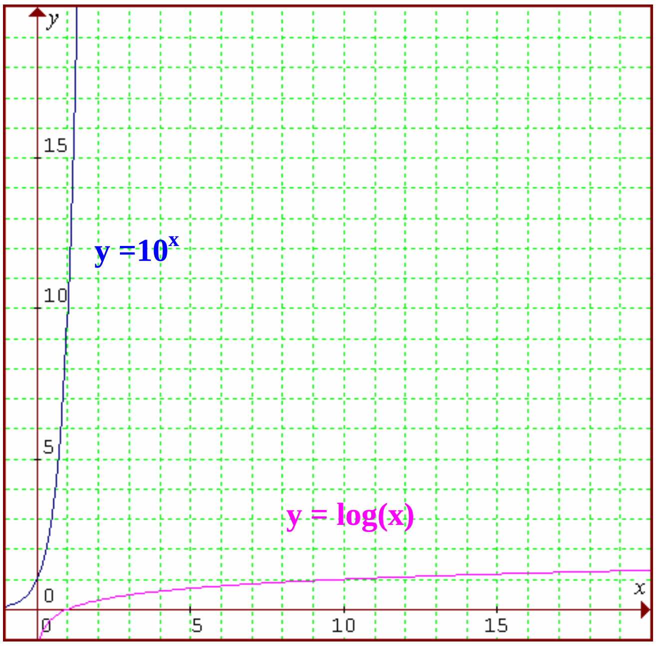
$$n = \log_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = 2^n \qquad \Rightarrow \qquad 2^{\log_2(x)} = x$$

John Neper et Henry Briggs ont établi la 1ère table de logarithmes décimaux à 8 décimales.

2) Définition

N'importe quel réel positif peur servir de base à un logarithme :

$$y = \log_a(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y \qquad \Rightarrow \qquad a^{\log_a(x)} = x$$



Le logarithme est donc la fonction inverse de l'exponentielle.

Les 2 courbes ci-contre sont symétriques par rapport à la droite
y = x

En pratique, les seuls logarithmes utilisés sont :
- Le logarithme décimal noté log(x) de base 10
- Le logarithme népérien noté ln(x) de base e ≈ 2,718

$$\log(10^x) = x \qquad \log(10) = 1$$
$$\ln(e^x) = x \qquad \ln(e) = 1$$

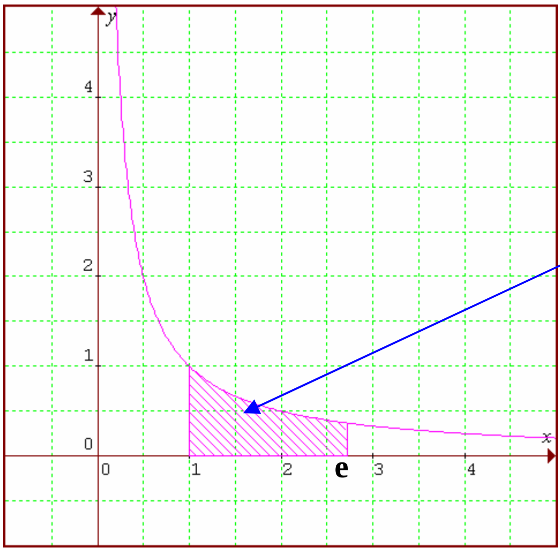
D'ou vient le nombre népérien (ou constante de Neper) ?

ln(x) est une primitive de la fonction 1/x

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x) + C$$

« e » est le nombre entier tel que la surface comprise entre la courbe y = 1 / x et l'axe des abscisses entre les bornes 1 et e soit égale à 1

Calcul de l'aire :



$$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = [\ln(x)]_1^e = \ln(e) - \ln(1) = 1 - 0$$

$$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = 1$$

e = 2,718281828

3) Opérations sur les logarithmes

Toutes les formules ci-dessous restent valables quelle que soit la base du logarithme

$$\boxed{\mathbf{\log(1) = 0 \quad et \quad \log_a(a) = 1}}$$

$$\log(a\,b) = \log(a) + \log(b)$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

$$\log\left(a^b\right) = b\,\log(a)$$

$$\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a)$$

$$\log\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\log(a)$$

$$\log\left(\sqrt[b]{a}\right) = \frac{1}{b}\log(a)$$

Jusqu'à la fin des années 70, pour extraire une racine n$^{\text{ième}}$, on prenait le logarithme du nombre, on le divisait par n puis on entrait le résultat de cette division dans la table de log pour avoir la solution de la racine.

4) Rappels sur les nombres exponentiels

$\forall\, a \in \Re$:

$a^0 = 1$ $(a \neq 0)$

$a^1 = a$

$a^x \,.\, a^y = a^{(x + y)}$

$(a^x)^y = a^{xy}$

$a^{-x} = 1 / a^x$

$$\lim \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad quand \quad x \to 0$$

5) Rappels sur les puissances de 10

Nom	Abréviation	Valeur
Exa	E	10^{18}
Péta	P	10^{15}
Téra	T	10^{12}
Giga	G	10^{9}
Méga	M	10^{6}
kilo	k	10^{3}
hecto	h	10^{2}
déca	da	10

Nom	Abréviation	Valeur
déci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
micro	µ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}
ato	a	10^{-18}

Note : Attention de respecter les majuscules/minuscules dans les abréviations.
Par exemple « M » et « m » sont très différents.
Kilo s'écrit en minuscule « k ».