# I R R A T I O N N A L I T É   D E   $\sqrt{2}$

Pythagore (Πυθαγόρας) (580-495 av JC) a introduit $\sqrt{2}$ comme étant la diagonale du carré de côté = 1
D'après certains historiens Pythagore aurait pu être un mathématicien fictif désignant un groupe de mathématiciens (comme Nicolas Bourbaki en Auvergne en 1935)
Réel ou fictif, il a donné naissance à l'école Pythagoricienne qui a poursuivi ses travaux.
L'école Pythagoricienne ne connaissait pas les nombres irrationnels, ils étaient convaincus que tout nombre était rationnel, donc pouvait être représenté par la fraction irréductible de deux nombres entiers.
Il devait donc en être de même pour $\sqrt{2}$ même si on n'avait pas encore trouvé la fraction.

Deux siècles plus tard, Aristote (384-322 av. JC), a démontré par l'absurde qu'il était impossible que $\sqrt{2}$ corresponde à une fraction irréductible.
Donc tous les nombres n'étaient pas rationnels et il existait des irrationnels.
On raconte que cette découverte aurait provoqué une vague de suicides au sein de l'école Pythagoricienne.

<u>Voici la démonstration d'Aristote :</u>

On suppose que $\sqrt{2}$ a une solution dans Q (ensemble des rationels)

Donc $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec $\{a\,;b\} \in \mathrm{N}^+$ (ensemble des entiers positifs)

Cette fraction est irréductible, donc a et b sont premiers entre eux (c'est-à-dire, n'admettent aucun diviseur commun).

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{a^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad 2\,b^2 = a^2$$

Donc $a^2$ est PAIR.

Si le carré d'un entier est pair, cet entier est pair $\Rightarrow$ a est PAIR.

Donc $\mathrm{a} = 2\,\mathrm{p}$ avec $\mathrm{p} \in \mathrm{N}^+$

$$2\,b^2 = a^2 \;\; et \;\; \mathrm{a} = 2\,\mathrm{p} \quad \Rightarrow \quad 2\,b^2 = (2\;p)^2 = 4\;p^2 \quad \Rightarrow \quad 2\,b^2 = 4\;p^2$$

$$\Rightarrow \; b^2 = 2\;p^2$$

Donc $b^2$ est PAIR.

Si le carré d'un entier est pair, cet entier est pair $\Rightarrow$ b est PAIR.

Donc $\mathrm{b} = 2\,\mathrm{q}$ avec $\mathrm{q} \in \mathrm{N}^+$

Donc $\frac{a}{b} = \frac{2\;p}{2\;q} = \frac{p}{q}$ donc $\frac{a}{b}$ n'était pas irréductible

On peut recommencer la même démonstration avec p et q

$\frac{p}{q} = \frac{2\;v}{2\;w}$ avec $\{v\,;w\} \in \mathrm{N}^+$ (ensemble des entiers positifs)

etc .... jusqu'à l'infini.

Donc il n'existe pas de fraction irréductible $= \sqrt{2}$