Intégrales définies

Changement de paramétrage :

Intégrale de longueur :

en xy ↓ *en polaire* ↓ *en paramétrique* ↓

$$L_{AB} \;=\; \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1+y'^2}\,dx \;=\; \int_{\theta_A}^{\theta_B} \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta \;=\; \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

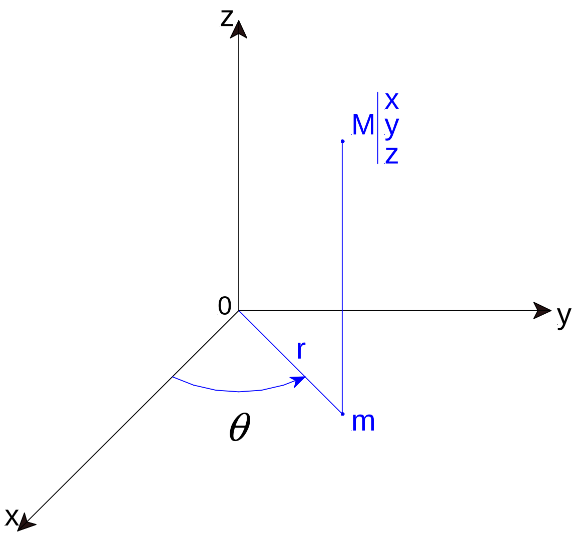
Intégrale de surface :

$$z = f(x,y) \qquad S \;=\; \iint_{\Delta} \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx.dy \qquad (\Delta \rightarrow proj.\,de\ S\ sur\ x \circ y)$$

en xy ↓ *en xy* ↓ *en polaire* ↓ *en paramétrique* ↓

$$S \;=\; \int_S \frac{(x.dy - y.dx)}{2} = \int_{x_A}^{x_B} x\,dy - \int_{x_A}^{x_B} y\,dx \;=\; \frac{1}{2}\int_{\theta_A}^{\theta_B} r^2\,d\theta \;=\; \int_{t_A}^{t_B} y(t)\,x'(t)\,dt$$

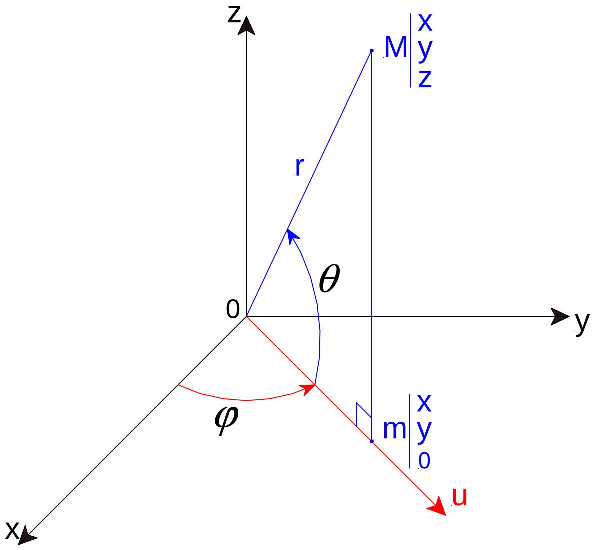
Changement de variable dans une intégrale cylindrique :



$$On\ a: \quad x = r\cos\theta \quad ; \quad y = r\sin\theta \quad ; \quad z = mM \quad \Rightarrow \quad dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz$$

$$I \;=\; \iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \;=\; \iiint_V f(r\cos\theta\,,\,r\sin\theta\,,\,z)\,r\,dr\,d\theta\,dz$$

Coordonnées sphériques :



$$On\ a: \qquad \varphi = (\overrightarrow{Ox}\,,\overrightarrow{Ou}) \qquad \theta = (\overrightarrow{Ou}\,,\overrightarrow{OM}) \qquad r = OM$$

$$x = r\,\cos\theta\,\cos\varphi$$
$$y = r\,\cos\theta\,\sin\varphi$$
$$z = r\,\sin\theta$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\Rightarrow \qquad dx\,dy\,dz \;=\; r^2\cos\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$I \;=\; \iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \;=\; \iiint_V f(r\,\cos\theta\,\cos\varphi\,,r\,\cos\theta\,\sin\varphi\,,r\,\sin\theta)\,r^2\cos\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

Quelques formules utiles :

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \;=\; \frac{\pi}{2} \qquad \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\,dx \;=\; \frac{\pi}{n\sin\dfrac{\pi}{n}}$$

Intégrales définies sur une plaque :

$$Aire\ d'une\ plaque: \qquad A = \iint_D dx\, dy$$

$$Masse\ d'une\ plaque: \quad m = \iint_D \rho(x,y)\, dx\, dy \qquad \rho(x,y) = densit\acute{e}$$

$$Centre\ de\ gravit\acute{e}\ d'une\ plaque: \ G \left| \begin{matrix} x_G \\ y_G \end{matrix} \right.$$

$$x_G = \frac{\iint_D \rho(x,y)\, x\, dx\, dy}{\iint_D \rho(x,y)\, dx\, dy} \qquad y_G = \frac{\iint_D \rho(x,y)\, y\, dx\, dy}{\iint_D \rho(x,y)\, dx\, dy}$$

$$Moment\ d'inertie\ d'une\ plaque\ par\ rapport\ \grave{a}\ O:$$

$$I_{D/0} = \iint_D \rho(x,y)\,(x^2+y^2)\, dx\, dy = I_{D/0x} + I_{D/0y}$$

$$Th\acute{e}or\grave{e}me\ d'hygins: \qquad I_{D/\Delta} = I_{D/\Delta'} + d^2 M$$

$$Polaire:$$

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_D F(r,\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

$$F(r,\theta) = f(x(r,\theta), y(r,\theta))$$

<u>Intégrales définies sur un objet non plan (en trois dimensions)</u> :

$$Volume : \quad V = \iiint_V dx\, dy\, dz$$

$$Masse : \quad m = \iiint_V \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \qquad \rho(x,y,z) = densité$$

$$Centre\ de\ gravité : \quad G \left| \begin{array}{l} x_G = \dfrac{\iiint_V \rho(x,y,z)\ x\ dx\, dy\, dz}{\iiint_V \rho(x,y,z)\ dx\, dy\, dz} \\ \\ y_G = \dfrac{\iiint_V \rho(x,y,z)\ y\ dx\, dy\, dz}{\iiint_V \rho(x,y,z)\ dx\, dy\, dz} \\ \\ z_G = \dfrac{\iiint_V \rho(x,y,z)\ z\ dx\, dy\, dz}{\iiint_V \rho(x,y,z)\ dx\, dy\, dz} \end{array} \right.$$

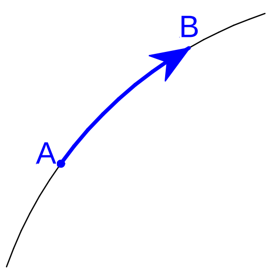
$$Moment\ d'inertie :$$

$$Par\ rapport\ au\ point\ O : \quad I_O = \iiint_V \rho(x,y,z)(x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$$

$$Par\ rapport\ à\ l'axe\ Oz : \quad I_{Oz} = \iiint_V \rho(x,y,z)(x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$$

$$Par\ rapport\ au\ plan\ xOy : \quad I_{xOy} = \iiint_V \rho(x,y,z)\ z^2 dx\, dy\, dz$$

<u>Intégrale curviligne</u> :



Il faut une forme différentielle : $\omega = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$

et un arc : $\left| \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = x(t) \end{array} \right. \qquad t_A = A \quad et \quad t_B = B$

$$\int_a^b \left[P(x(t),y(t))\ x'(t) + Q(x(t),y(t))\ y'(t)\right] dt = \int \omega(x,y)$$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \omega(x,y) + \int_{\overset{\frown}{BC}} \omega(x,y) = \int_{\overset{\frown}{AC}} \omega(x,y) \qquad et \qquad \int_{\overset{\frown}{AB}} \omega_1(x,y) + \omega_2(x,y) = \int_{\overset{\frown}{AB}} \omega_1(x,y) + \int_{\overset{\frown}{AB}} \omega_2(x,y)$$

$$\int_{C^+} P\ dx + Q\ dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$$

Formule générale du changement de variables :

$$Soit: \quad \left| \begin{array}{l} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{array} \right.$$

$$I \;=\; \iiint_V f\,(x,y,z)\; dx\; dy\; dz \;\;=\;\; \iiint_V f\,(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\;|\Delta|\; du\; dv\; dw$$

$$Avec\ le\ déterminant: \;\; \Delta \;=\; \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| = \begin{vmatrix} \alpha_x & \beta_x & \varphi_x \\ \alpha_y & \beta_y & \varphi_x \\ \alpha_z & \beta_z & \varphi_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_x = \dfrac{\partial x}{\partial u} & \beta_x = \dfrac{\partial x}{\partial v} & \varphi_x = \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \alpha_y = \dfrac{\partial y}{\partial u} & \beta_y = \dfrac{\partial y}{\partial v} & \varphi_x = \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \alpha_z = \dfrac{\partial z}{\partial u} & \beta_z = \dfrac{\partial z}{\partial v} & \varphi_z = \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$