Résolution du polynôme du 3$^{\text{ème}}$ degré
(Méthode de CARDAN)

Soit la fonction : $\mathbf{f(X) = X^3 + a\,X^2 + b\,X + c}$
Nous cherchons les racines « X » telles que f(X) = 0

Afin de se débarrasser du terme au carré, on va effectuer le changement de variable suivant :

$$X = (x - a / 3)$$

On définit la fonction **g(x)** telle que : $\mathbf{f(X) = f(x - a/3) = g(x)}$

$g(x) = (x - a/3)^3 + a\,(x - a/3)^2 + b\,(x - a/3) + c$

$g(x) = x^3 - 3\,x^2 a/3 + 3\,x\,a^2/9 - a^3/27 + a\,(x^2 - 2\,x\,a/3 + a^2/9) + b\,x - b\,a/3 + c = 0$

$g(x) = x^3 - \cancel{a\,x^2} + x\,a^2/3 - a^3/27 + \cancel{a\,x^2} - 2\,x\,a^2/3 + a^3/9 + b\,x - b.a/3 + c = 0$

$\rightarrow$ **le terme en x^2 disparaît.**

$g(x) = x^3 + x\,(a^2/3 - 2\,a^2/3 + b) - a^3/27 + a^3/9 - b\,a/3 + c = 0$

$g(x) = x^3 + x\,(b - a^2/3) + (a/3)(- a^2/9 + a^2/3 - b) + c = 0$

$g(x) = x^3 + x\,(b - a^2/3) + (a/3)(2\,a^2/9 - b) + c = 0$

$g(x) = x^3 + x\,(b - a^2/3) + (a/3)(2\,(a/3)^2 - b) + c = 0$

On pose : $\quad p = (b - a^2/3) \quad$ **et** $\quad q = (a/3)(2.(a/3)^2 - b) + c$

$g(x) = x^3 + x\,(b - a^2/3) + (a/3)(2\,(a/3)^2 - b) + c = 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) = x^3 + p\,x + q$

On effectue un nouveau changement de variable, on pose : $\mathbf{x = u + v}$

On définit la fonction **h(u,v)** telle que : $\mathbf{g(x) = g(\,(u + v)\,) = h(u,v)}$
On a toujours **:** $\mathbf{f(X) = g(x) = h(u,v)}$

$h(u,v) = (u + v)^3 + p\,(u + v) + q$

$h(u,v) = u^3 + 3\,u^2v + 3\,u\,v^2 + v^3 + p\,u + p\,v + q$

$h(u,v) = u^3 + v^3 + u\,(3\,u\,v + p) + v\,(3\,u\,v + p) + q$

$h(u,v) = (u^3 + v^3) + (u + v)\,(3\,u\,v + p) + q$

Si : $\quad (u^3 + v^3) = - q \quad$ **et** $\quad (3\,u\,v + p) = 0 \quad$ **alors :** $\quad h(u,v) = 0$

L'équation est donc résolue pour ces valeurs de « u » et de « v ».

Donc : $\quad (u^3 + v^3) = - q \quad$ **et** $\quad u\,v = - p / 3 \quad$ **donc :** $\quad (u\,v)^3 = u^3v^3 = - p^3 / 27$

Produit de u^3 et v^3	$\Rightarrow$	$u^3\,v^3$	=	$- p^3 / 27$
Somme de u^3 et v^3	$\Rightarrow$	$u^3 + v^3$	=	$- q$

On est ramené au problème simple de 2 variables dont on connaît la somme et le produit.

<u>Rappel</u> :
Si on a : $\quad x_1\,x_2 = P \quad$ **et** $\quad x_1 + x_2 = S$
$\Rightarrow$ x_1 **et** x_2 **sont les racines de l'équation :** $\quad x^2 - S\,x + P = 0$

On en déduit l'équation :

$t^2 + q\,t - p^3 / 27 = 0$ dont les racines sont : $t_1 = u^3$ et $t_2 = v^3$

$$\Delta = q^2 + 4\,p^3 / 27$$

Si le déterminant : $\Delta > 0$ on aura deux racines : t_1 et t_2 réelles

Si le déterminant : $\Delta = 0$ on aura une racine double : $t_1 = t_2$

Si le déterminant : $\Delta < 0$ on aura deux racines : t_1 et t_2 complexes.

<u>Rappel</u> : (voir cours sur les racines cubiques de 1)

Les 3 racines cubiques de 1 sont :

Première racine : 1

Deuxième racine : $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{i.\sqrt{3}}{2}$

Troisième racine : $\varpi = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{i.\sqrt{3}}{2}$

On a donc 3 racines pour « u » et 3 racines pour « v » :

$u_1 = \sqrt[3]{t_1}$ $\quad u_2 = \sqrt[3]{t_1}\left[-\frac{1}{2} + \frac{i.\sqrt{3}}{2}\right]$ $\quad u_3 = \sqrt[3]{t_1}\left[-\frac{1}{2} - \frac{i.\sqrt{3}}{2}\right]$

$v_1 = \sqrt[3]{t_2}$ $\quad v_2 = \sqrt[3]{t_2}\left[-\frac{1}{2} + \frac{i.\sqrt{3}}{2}\right]$ $\quad v_3 = \sqrt[3]{t_2}\left[-\frac{1}{2} - \frac{i.\sqrt{3}}{2}\right]$

Il reste maintenant à remonter tous les changements de variables.

$x_1 = u_1 + v_1$ $\quad x_2 = u_2 + v_2$ $\quad x_3 = u_3 + v_3$

Et enfin :

$X_1 = (u_1 + v_1) - a / 3$ $\quad X_2 = (u_2 + v_2) - a / 3$ $\quad X_3 = (u_3 + v_3) - a / 3$

<u>Attention</u> :

u_1 et **v_1** ont des valeurs définies dans l'ensemble des Réels.

Donc l'équation du 3ème degré admet toujours une racine **X_1** Réelle

Les termes **u_2**, **u_3**, **v_2** et **v_3** ont des valeurs définies dans l'ensemble des Complexes, mais les sommes **$(u_2 + v_2)$** et **$(u_3 + v3)$** peuvent donner aussi bien un résultat défini dans l'ensemble des Réels que dans l'ensemble des Complexes.

Donc **X_2** et **X_3** seront, soit DEUX racines Réelles, soit DEUX Racines Complexes conjuguées

<u>Note</u> : C'est Jérôme CARDAN (1501-1576) qui a inventé le nombre i tel que $i^2 = -1$ justement dans le but de résoudre l'équation du 3ème degré. Considéré comme un simple artifice de calcul, on l'appellera : *nombre imaginaire*. C'est au XIXème siècle qu'on crée le nombre complexe qu'on retrouve maintenant partout en physique (électricité, électronique, etc...).