Développements limités

Un **développement limité** (noté **DL**) d'une fonction f(x) au voisinage d'un point, est une approximation polynomiale de cette fonction en ce point, c'est-à-dire l'écriture de cette fonction sous la forme de la somme d'une fonction polynôme dont le degré est appelé l'*ordre* du développement et d'un reste qui peut être négligé lorsque la variable est suffisamment proche du point considéré.

Quelques formules utiles :

a) Polynômes et logarithmes :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)\,x}{1!} + \frac{f''(0)\,x^2}{2!} + \frac{f'''(0)\,x^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots + \frac{f^{(n)}(0)\,x^n}{n!} + n^n\varepsilon(x)$$

$$Avec \quad \varepsilon(x) \to 0 \quad quand \quad x \to 0$$

$$\ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{(-1)^n x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x^{2n} + x^{2n}\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n}\varepsilon(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots.(\alpha-n+1)x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$

b) Trigonométrie :

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x)$$

$$tg(x) = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}\, x^{2n-1}}{(2n)!} + x^{2n-1}\varepsilon(x)$$

B_{2n} = Nombre de Bernoulli

$$\mathrm{cotg}(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}\, x^{2n-1}}{3(2n)!} + x^{2n-3}\varepsilon(x)$$

$$sh(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x)$$

$$th(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{(-1)^n 2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}\, x^{2n-1}}{(2n)!} + x^{2n-1}\varepsilon(x)$$

$$\mathrm{cotg}(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{(-1)^n 2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}\, x^{2n-1}}{3(2n)!} + x^{2n-3}\varepsilon(x)$$

$$Arc\sin(x) = x + \frac{1}{2}\times\frac{x^3}{3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1\times3\times5\times\ldots..(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots..(2n)}\times\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$Arc\cos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\times\frac{x^3}{3} - \ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{1\times3\times5\times\ldots..(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots..(2n)}\times\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$Arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$Argsh(x) = x - \frac{1}{2}\times\frac{x^3}{3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^n\times\frac{1\times3\times5\times\ldots..(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots..(2n)}\times\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$Arctg(x) = x + \frac{x^3}{3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$