Résolution des équations du second degré

Tous ceux qui ont eu à résoudre ce type d'équation on généralement utilisé : $\Delta = b^2 - 4ac$
Mais pourquoi Δ ? D'où sort-il ?
En voici la démonstration :

Soit la fonction : $f(x) = ax^2 + bx + c$ *Donc* $f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$

Pour mettre $f(x)$ *sous forme canonique, on calcule l'identité remarquable* (I) :

(I) : $(x-\alpha)^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2$

On pose : $\frac{b}{a} = -2\alpha \Rightarrow \alpha = -\frac{b}{2a}$ *et* $\alpha^2 = \frac{b^2}{4a^2}$

Et on remplaçe α *et* α^2 *par leurs valeurs :* (I) : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$

Pour retrouver $f(x)$ *on rajoute des deux côtés de l'égalité le terme :* $\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)$

$$(I) : \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)$$

(I) : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ *En multipliant par "a" on retrouve* $f(x)$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + a\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right) \Rightarrow f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

C'est donc la forme canonique de $f(x)$ *dont l'extrêmum sera* $M(\alpha, \beta)$

En remettant "a" en facteur on obtient :

$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$ *Le* terme $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ étant positif $f(x)$ *n'aura des racines que si* $(b^2 - 4ac) \geq 0$

On fait apparaître un carré pour avoir une identité remarquable : $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] \quad \textit{en posant} \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

Donc : $A = \left(x + \frac{b}{2a}\right)$ *et* $B = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \Rightarrow f(x) = a(A^2 - B^2) = a(A+B)(A-B)$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right] = a\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

On obtient les racines : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ *et* $x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ *Donc* $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$