Qu'est-ce qu'une dérivée ?

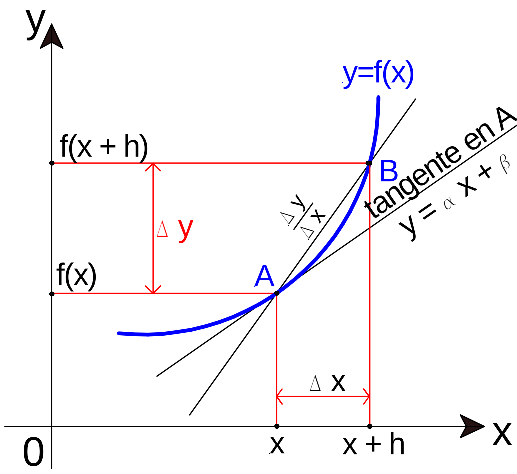
Définition de la dérivée :

Soit une courbe y = f(x)

En un point quelconque « A », la courbe admet une tangente d'équation : $y = \alpha x + \beta$

La dérivée de f(x) est l'expression f '(x) qui donne le coefficient directeur « α » de la tangente en n'importe quel point de f(x).

Donc sur la figure ci-contre :
Soit le point : $A(x_A, y_A)$ on aura : $f'(x_A) = \alpha$
qui est le coefficient directeur de la tangente.



Pour calculer la pente (α) de la tangente en « A » on définit la valeur « h » comme étant très proche de zéro en un point : $B(x_B, y_B)$ tel que : $x_B = x_A + h$ et $y_B = f(x_A + h)$

On calcule la pente de la droite « AB » : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_A + h) - f(x_A)}{(x_A + h) - x_A} = \dfrac{f(x_A + h) - f(x_A)}{h}$

Si on fait tendre « h » vers zéro, « B » va se rapprocher jusqu'à être confondu avec « A » et la droite « AB » deviendra la tangente au point « A »

La dérivée de f(x) sera la limite de : $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ quand $h \to 0$ donc quand $\Delta x \to 0$

Le coefficient directeur de la tangente (la pente) « α » sera égal à la dérivée : $\alpha = f'(x_A)$

Prenons par exemple une courbe d'équation : $f(x) = k.x^n$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x) = k.x^n \quad donc \quad f(x+h) = k.(x+h)^n$$

$$f(x+h) = k.(x+h)^n = k(x^n + n.x^{n-1}h + \left(\sum_1^{n-1} m\right).x^{n-2}h^2 + ... + h^n)$$

$$\Delta y = f(x+h) - f(x) = k.\left[(x^n + n.x^{n-1}h + \left(\sum_1^{n-1} m\right).x^{n-2}h^2 + ... + h^n)\right] - k.x^n$$

$$\Delta y = k(x^n + n.x^{n-1}h + \left(\sum_1^{n-1} m\right).x^{n-2}h^2 + ... + h^n) - k.x^n \qquad les\ termes\ \ kx^n - k.x^n \ \ s'annulent$$

$$\Delta y = k(n.x^{n-1}h + \left(\sum_1^{n-1} m\right).x^{n-2}h^2 + ... + h^n) \; = \; k.h.(n.x^{n-1} + \left(\sum_1^{n-1} m\right).x^{n-2}h + ... + h^{n-1})$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{k.h.(n.x^{n-1}+\left(\sum_{1}^{n-1}m\right).x^{n-2}h+.....+h^{n-1})}{h}\quad \textit{On simplifie par } h \quad (h\neq 0)$$

$$\textit{Donc}: \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=k.(n.x^{n-1}+\left(\sum_{1}^{n-1}m\right).x^{n-2}h+.....+h^{n-1})$$

On va calculer la limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quand $h\rightarrow 0$

$h\rightarrow 0$ *donc très petit devant x* *donc on néglige les termes :* $\left(\sum_{1}^{n-1}m\right).x^{n-2}h+.....+h^{n-1}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\rightarrow k.n.x^{n-1} \quad \text{quand} \quad \Delta x\rightarrow 0 \quad (car\ \Delta x=h)$$

On a donc démontré que si $f(x)=k.x^{n}$ *sa dérivée* $f\,'(x)=k.n.x^{n-1}$

<u>Calcul de la tangente</u> :

Maintenant on va calculer l'équation de la tangente au point $A(x_A,y_A)$ à la courbe f(x)
L'équation de la droite est $y = \alpha x + \beta$

La droite passe par le point $A(x_A,y_A)$ donc : x_A et y_A vérifient son équation :

$y_A = \alpha . x_A + \beta$ Le point $A(x_A,y_A)$ étant sur la courbe définie par f(x), on a $y_A = f(x_A)$

Donc : $f(x_A) = \alpha . x_A + \beta$

On connaît le coefficient directeur (la pente) de la tangente an « A » :

$\alpha = f\,'(x_A)$

Donc : $f(x_A) = f\,'(x_A) . x_A + \beta$

$\beta = f(x_A) - f\,'(x_A) . x_A$

Donc l'équation de la droite $y = \alpha x + \beta$ devient : $y = f\,'(x_A) . x + f(x_A) - f\,'(x_A) . x_A$

Donc au point : $A(x_A,f(x_A))$ la tangente à f(x) aura pour équation :

$$\boxed{y = f\,'(x_A)\,(x - x_A) + f(x_A)}$$