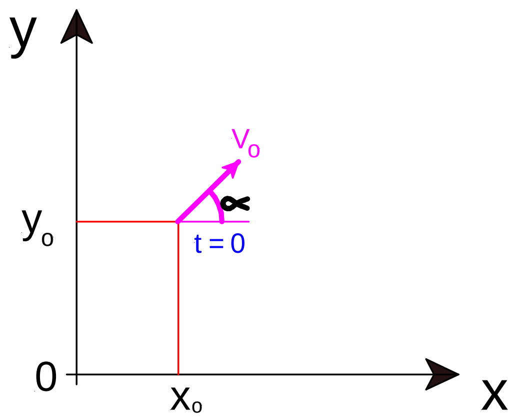
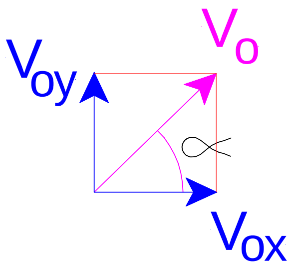
CALCUL DES TRAJECTOIRES BALISTIQUES



Soit un projectile de coordonnées x_0, y_0 à $t = 0$ lancé avec une vitesse initiale V_0 suivant un angle α Les coordonnées de ce projectiles seront définies en 3 dimensions, x, y et t

Le mouvement sera décomposé en 2 équations horaires fonction du temps t :

- Mouvement horizontal : $x(t)$
- Mouvement vertical : $y(t)$



$V_{0x} = V_0 \cos \alpha$
$V_{0y} = V_0 \sin \alpha$

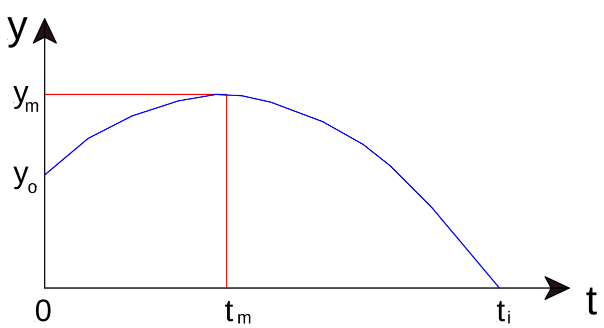
RAPPEL : Mouvement uniformément accéléré	
Position :	$x(\mathbf{t}) = (a\, \mathbf{t}^2) / 2 + V_0\, \mathbf{t} + x_0$
Vitesse :	$V(\mathbf{t}) = x'(\mathbf{t}) = a\, \mathbf{t} + V_0$
Accélération :	$a = V'(\mathbf{t}) = x''(\mathbf{t})$

Mouvement horizontal :

Le mouvement horizontal n'étant pas accéléré est un mouvement uniforme :
$x(\mathbf{t}) = V_{0x}\, \mathbf{t} + x_0$
$x(\mathbf{t}) = V_0 \cos \alpha\ \mathbf{t} + x_0$

Mouvement vertical :

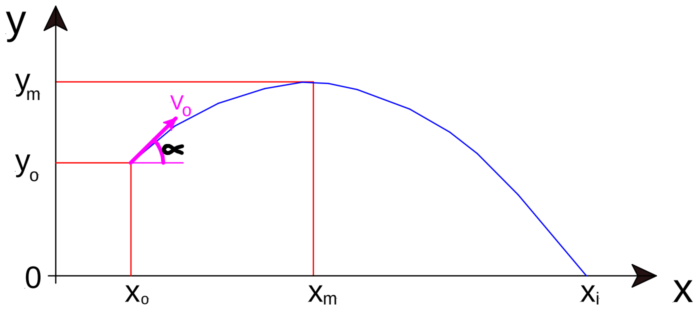
Le mouvement vertical est soumis à une accélération constante dirigée vers le bas = - g c'est donc un mouvement uniformément accéléré :



$y(\mathbf{t}) = -(g\, \mathbf{t}^2) / 2 + V_{0y}\, \mathbf{t} + y_0$
$y(\mathbf{t}) = -(g\, \mathbf{t}^2) / 2 + V_0 \sin \alpha\ \mathbf{t} + y_0$
C'est une parabolle

Donc $V_y(\mathbf{t}) = y'(\mathbf{t}) = -g\, \mathbf{t} + V_0 \sin \alpha\ \mathbf{t}$

Calcul de la trajectoire $y = f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$



Nous avons un système à 2 équations duquel il s'agit d'éliminer « **t** »

(1) $x(\mathbf{t}) = V_0 \cos\alpha\ \mathbf{t} + x_0$

(2) $y(\mathbf{t}) = -(g\,\mathbf{t}^2)/2 + V_0 \sin\alpha\ \mathbf{t} + y_0$

(1) $\Rightarrow\quad \mathbf{t} = (x(\mathbf{t}) - x_0)\ /\ V_0 \cos\alpha$

Si dans **(2)** on remplace « **t** » par sa valeur en fonction de « **x** », on obtient :

$$y = \frac{-g\,(x - x_{\grave{a}})^2}{2\,(V_0 \cos\alpha)^2} + \frac{V_0 \sin\alpha}{V_0 \cos\alpha}(x - x_0) + y_0 \quad = \quad \frac{-g\,(x^2 - 2\,x\,x_0 + x_0^{\ 2})}{2\,(V_0 \cos\alpha)^2} + tg\ \alpha\,(x - x_0)\ + y_0$$

$$y = \frac{-g}{2\,(V_0 \cos\alpha)^2}\ x^2 + \left[\frac{g\ \ x_0}{(V_0 \cos\alpha)^2} + tg\ \alpha\right] x\ +\ tg\ \alpha\ \ x_0 + y_0 - \frac{g\ x_0^{\ 2}}{2\,(V_0 \cos\alpha)^2}$$

Calcul du point d'impact avec le sol (de coordonnées $x(t_i) = x_i$ et $y(t_i) = 0$) :

$y(t_i) = 0$ donc $-(g\,\mathbf{t}^2)/2 + V_0 \sin\alpha\ \mathbf{t} + y_0 = 0$

Cette équation du second degré admet 2 racines, une des deux étant négative n'a aucun sens, seule la racine positive t_i serra retenue.

Calcul de t_i :

$$\Delta = (V_0\ cos\ \alpha\ )^2 - 4\,(-g)\,(y_0) \quad = \quad (V_0\ cos\ \alpha\ )^2 + 4\ g\ y_0$$

$$t_i = \frac{-V_0\ \ cos\ \alpha - \sqrt{(V_0\ cos\ \alpha\ )^2 + 4\ g\ y_0}}{-2\ g} = \frac{V_0\ \ cos\ \alpha + \sqrt{(V_0\ cos\ \alpha\ )^2 + 4\ g\ y_0}}{2\ g}$$

Connaissant t_i on peut calculer la distance d'impact : $x_i = x(t_i)$

$x_i = V_0 \cos\alpha\ \ t_i + x_0$

$y_i = 0$

Calcul de l'apogée de la trajectoire :

À l'apogée (de coordonnées : x_m et y_m), la vitesse verticale est nulle : $V_y(\mathbf{t}) = 0$

$V_y(\mathbf{t}) = y'(\mathbf{t}) = -g\ \mathbf{t} + V_{0y}$

$-g\ \mathbf{t}_m + V_{0y} = 0$ donc $g\ \mathbf{t}_m = V_{0y}$ donc $\mathbf{t}_m = V_{0y} / g = V_0 \sin\alpha / g$

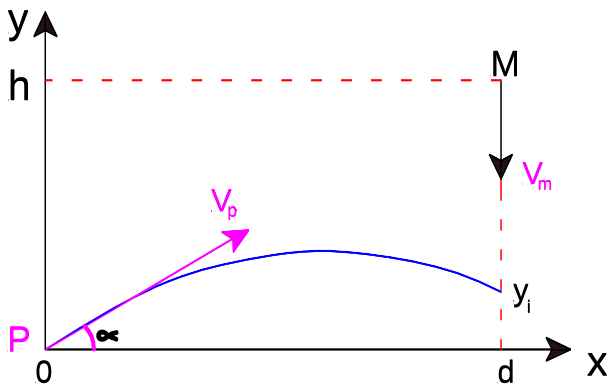
Connaissant t_m on peut calculer les coordonnées de l'apogée : $x_m = x(t_m)$ et $y_m = y(t_m)$

$x_m = V_0 \cos\alpha\ \ t_m + x_0$

$y_m = -(g\ t_m^{\ 2})/2 + V_0 \sin\alpha\ \ t_m + y_0$

EXEMPLE DE CALCUL D'UN IMPACT

Soit une masse M lachée sans vitesse initiale ($V_m = 0$) depuis une hauteur = h.
Soit un projectile P lancé depuis une hauteur = 0 à une vitesse V_p suivant un angle α.
La distance horizontale entre M et P est : x = d
La masse M n'est soumise qu'à la gravité.
M et P démarent au même instant : t = 0
Le problème posé est de calculer Vp afin que le projectile P percute la masse M



L'impact aura lieu au point : x = d : y = y_i

La condition pour qu'il ait impact est que les deux mobiles s'y trouvent au même instant : t = t_i au point : x = d : y = y_i

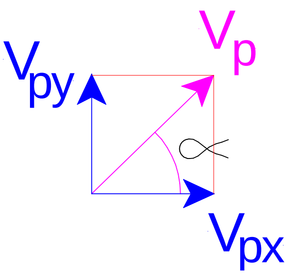
L'équation du mouvement de M est :

$$y_M(t) = h - \frac{g\,t^2}{2}$$

$$x_M(t) = d \quad \text{(constante)}$$

Donc l'instant de l'impact t_i sera :

$$y_i = h - \frac{g\,t_i^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{g\,t_i^2}{2} = h - y_i \quad \Rightarrow \quad t_i = \sqrt{\frac{2(h-y_i)}{g}}$$



$V_{px} = V_p \cos\alpha$
$V_{py} = V_p \sin\alpha$

L'équation du mouvement de P est :

$$y_P(t) = -\frac{g\,t^2}{2} + V_{py}\,t$$

$$x_P(t) = V_{px}\,t$$

Donc pour qu'il y ait impact, il faut que :

$y_M(t_i) = y_P(t_i) = y_i$ et $x_P(t_i) = d$

$$y_M(t_i) = y_P(t_i) \quad \Rightarrow \quad h - \frac{g\,t_i^2}{2} = -\frac{g\,t_i^2}{2} + V_{py}\,t_i \quad \Rightarrow \quad h = V_{py}\,t_i$$

$$\Rightarrow \quad t_i = \frac{h}{V_{py}} \quad \Rightarrow \quad t_i = \frac{h}{V_p \sin\alpha}$$

$$x_P(t_i) = d \quad \Rightarrow \quad V_{px}\, t_i = d$$

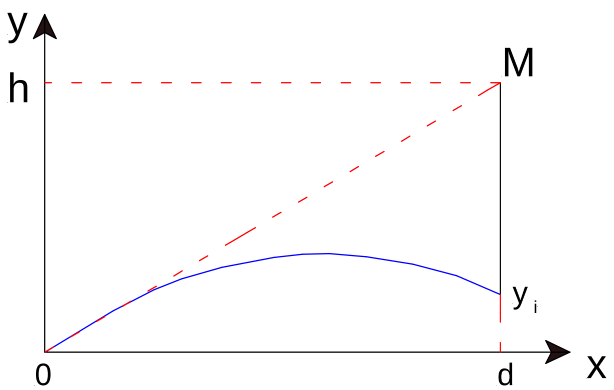
$$avec \quad t_i = \frac{h}{V_p \sin\alpha} \quad et \quad V_{px} = V_p \cos\alpha$$

$$Donc: \quad V_p \cos\alpha \frac{h}{V_p \sin\alpha} = d \quad On\ peut\ simplifier\ par\ V_p$$

$$\Rightarrow \quad \frac{h}{tg\,\alpha} = d \qquad \Rightarrow \quad tg\,\alpha = \frac{h}{d}$$

Donc la vitesse initiale V_p du projectile n'intervient pas.
Seul l'angle de lancement est important.

L'angle de lancement α doit être tel que la visée soit faite sur le point de départ de M



Il y aura toutefois une vitesse minimum limite. En effet, le projectile devra avoir parcouru la distance *d* avant que la masse n'ait touché le sol.
Le temps maximum est donné par le temps de chute de la masse M

$$h = \frac{g\, t_m^{\,2}}{2} \quad \Rightarrow \quad t_m = \sqrt{\frac{2\,h}{g}}$$

Donc la vitesse minimum du projectile P sera :

$$V_p\,(\cos\alpha)\, t_m = d \quad et \quad t_m = \sqrt{\frac{2\,h}{g}} \quad \Rightarrow \quad V_p = \frac{d}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2\,h}}$$

$$Sachant\ que: \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 x}} \quad \text{(voir formulaire de trigo)} \quad et\ que: \quad tg\,\alpha = \frac{h}{d}$$

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{1+\frac{h^2}{d^2}} \quad \Rightarrow \quad V_p = d\sqrt{1+\frac{h^2}{d^2}}\sqrt{\frac{g}{2\,h}} = d\sqrt{\frac{g\,(d^2+h^2)}{2\,h\,d^2}}$$

$$\text{Donc la vitesse minimum de lancement du projectile est :} \quad V_p = \sqrt{\frac{g\,(d^2+h^2)}{2\,h}}$$

$$EN\ RÉSUMÉ: \quad tg\,\alpha = \frac{h}{d} \quad ET \quad V_p \geq \sqrt{\frac{g\,(d^2+h^2)}{2\,h}}$$

SONT LES SEULES CONDITIONS POUR QU'IL Y AIT IMPACT